



ce
pre
UNI

Trigonometría

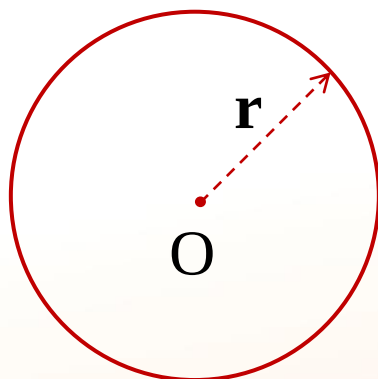
**CICLO
PRE 2024-I**

- ✓ **LONGITUD DE UN ARCO DE CIRCUNFERENCIA**
- ✓ **ÁREA DE UN SECTOR CIRCULAR**
- ✓ **TRAPECIO CIRCULAR**



* Longitud de una circunferencia

La longitud de una circunferencia es igual a dos veces la longitud del radio multiplicado por π .



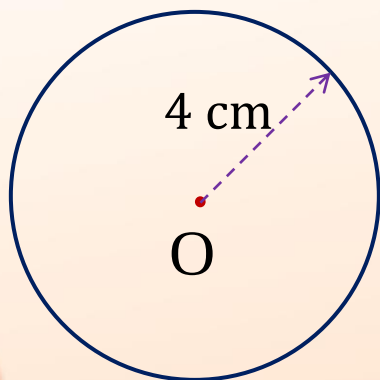
$$L_{\odot} = 2\pi r$$

Donde:

r : Longitud del radio de la circunferencia

$$\pi \approx 3,1416$$

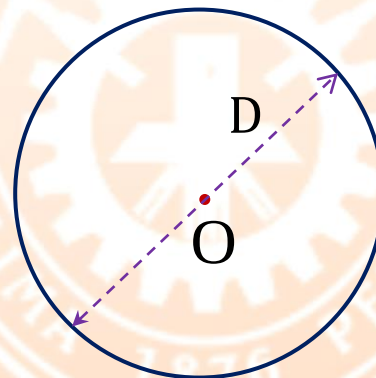
Por ejemplo en la figura:



$$L_{\odot} = 2\pi r = 2\pi(4)$$

$$\therefore L_{\odot} = 8\pi \text{ cm}$$

También se cumple que:

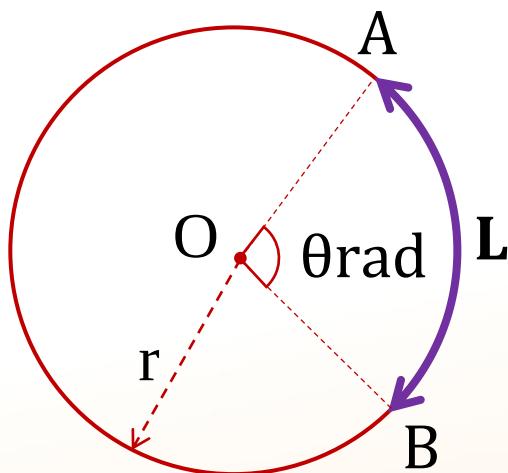


$$L_{\odot} = \pi D$$

D : Longitud del diámetro de la circunferencia.

* Longitud de un arco de circunferencia

En la figura:



Por regla de tres simple:

Ángulo central

Arco

$$2\pi \longrightarrow (2\pi r)$$

$$\theta \longrightarrow L$$

$$\Rightarrow 2\pi L = \theta(2\pi r) \quad \therefore \boxed{L = \theta r}$$

En la última fórmula:

* θ : Número de radianes del ángulo central

* Importante: $0 < \theta < 2\pi$

* Región AOB: sector circular

Además:

$$\boxed{\theta = \frac{L}{r}}$$

$$\boxed{r = \frac{L}{\theta}}$$

PROBLEMA 1 (EXAMEN DE ADMISIÓN UNI 2023-II)

En la figura mostrada, el punto O es el centro de los sectores circulares AOB , COD y EOF , $OA=R$, $BC=DE=r$, y las longitudes de los arcos son $L_1 = 6r$, $L_3 = 10r$. Calcule la medida del ángulo θ en radianes

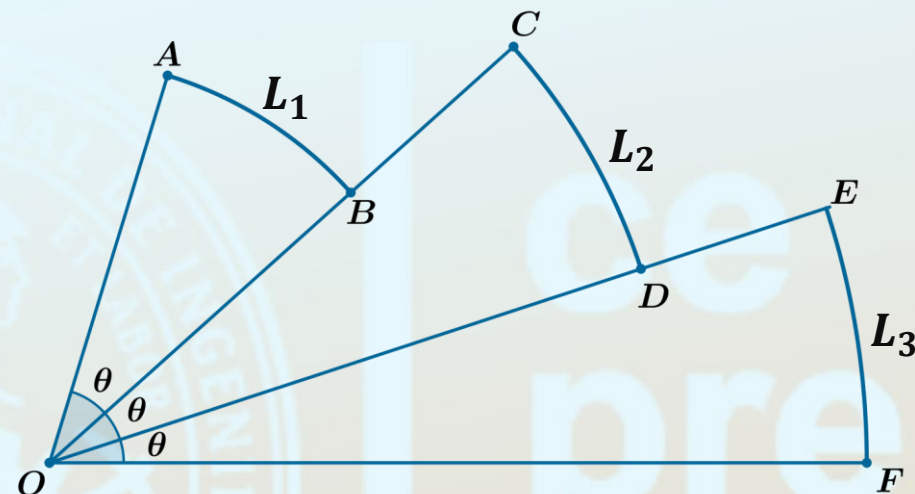
A) 1

B) $3/2$

C) 2

D) $5/2$

E) 3



PROBLEMA 2

Un cuadrado y un sector circular son isoperimétricos. Si la medida del ángulo central del sector circular es $1,5$ rad; calcule la razón entre la longitud del lado del cuadrado y la longitud del radio del sector circular (en ese orden).

A) $5/6$

B) $6/7$

C) $7/8$

D) $8/9$

E) $9/10$

PROBLEMA 3

De un disco de cartulina de radio 40 cm, se corta un sector circular cuya medida del ángulo central es 180° . Al unir los bordes de la parte restante del disco, se obtiene un cono. Calcule la longitud del radio de la base del cono en cm.

A) 25

B) 24

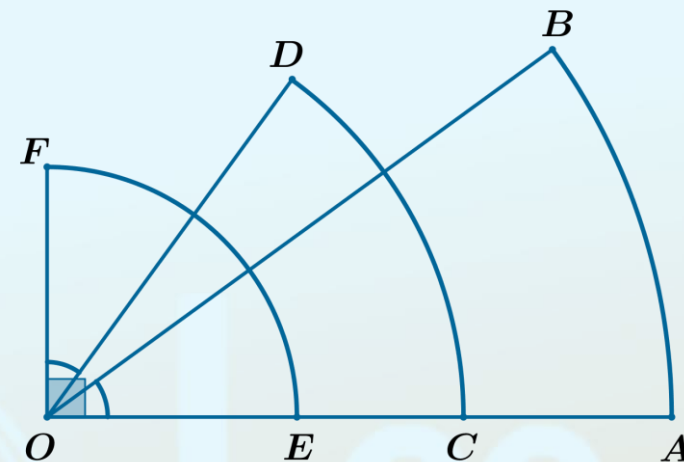
C) 22

D) 20

E) 18

PROBLEMA 4

La en la figura mostrada se tiene que: $OA=15$ u, $OE=6$ u y la $m\angle AOB = m\angle DOF$. Calcule la longitud de $\overline{OC}$ (en u), si las longitudes de los arcos $\widehat{AB}$, $\widehat{CD}$ y $\widehat{EF}$ son iguales.



- A) 9 B) 10 C) 10,5 D) 11 E) 12

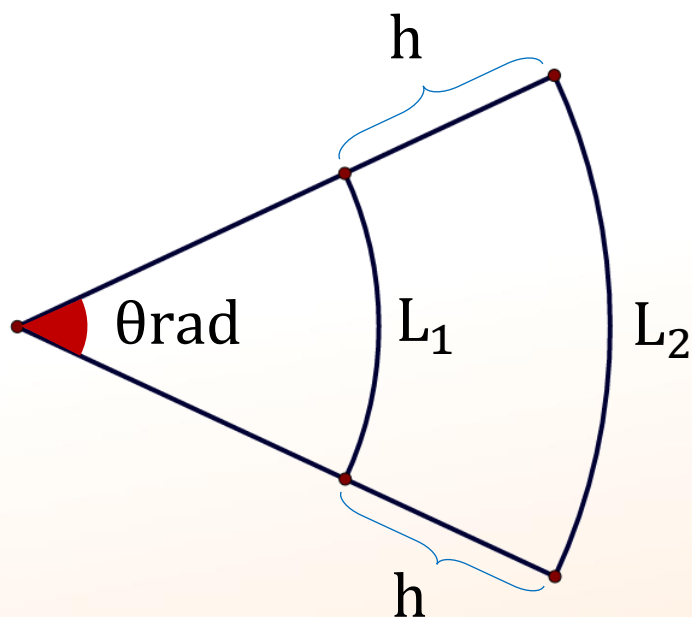
PROBLEMA 5

En una circunferencia se inscribe un triángulo isósceles cuyos lados congruentes forman un ángulo cuya medida es 2θ , y el tercer lado intercepta un arco en la circunferencia, cuya longitud es igual a la longitud de los lados congruentes. Calcule $\cos(\theta)/\theta$

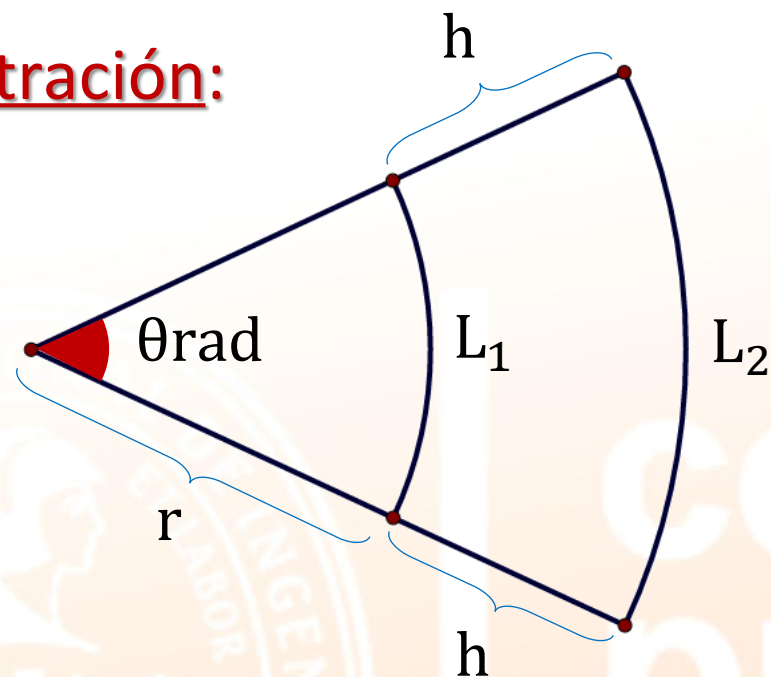
- A) $1/4$ B) $1/2$ C) 1 D) $3/2$ E) 2

Relaciones adicionales en sectores circulares concéntricos

1



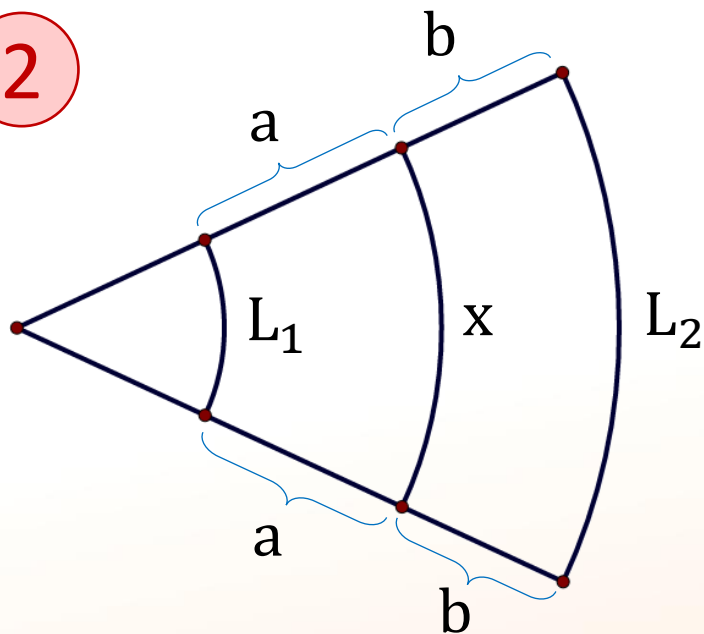
$$\theta = \frac{L_2 - L_1}{h}$$

Demostración:


$$L_2 - L_1 = \theta(r + h) - \theta r = \cancel{\theta r} + \theta h - \cancel{\theta r}$$

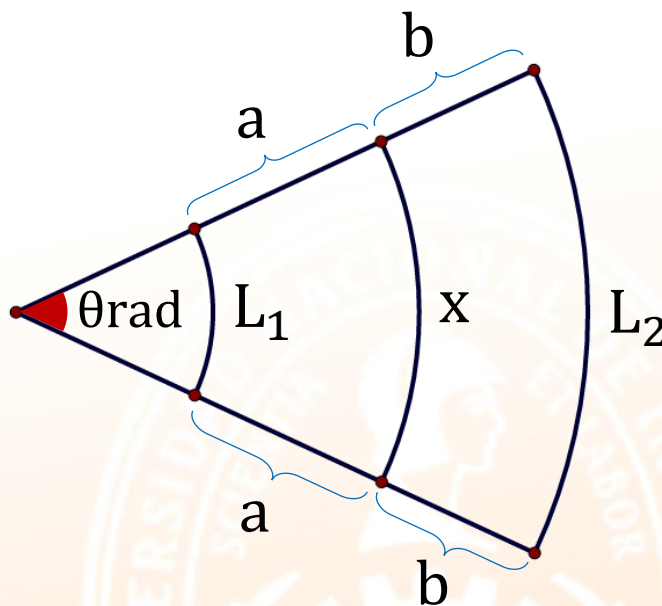
$$\Rightarrow L_2 - L_1 = \theta h \quad \therefore \theta = \frac{L_2 - L_1}{h}$$

2



$$x = \frac{aL_2 + bL_1}{a + b}$$

Demostración:



$$\theta = \frac{x - L_1}{a} = \frac{L_2 - x}{b}$$

$$bx - bL_1 = aL_2 - ax$$

$$(b + a)x = aL_2 + bL_1$$

$$\therefore x = \frac{aL_2 + bL_1}{b + a}$$

PROBLEMA 6 (PC 01_2023-I)

En la figura mostrada, AOB, COD y EOF son sectores circulares concéntricos, donde los arcos $\widehat{AB}$, $\widehat{CD}$ y $\widehat{EF}$ son z , y , x (en u) respectivamente. Además $AC = c u$, $CE = b u$ y $EO = a u$.

Calcule:

$$\sqrt{\frac{(z - y)(y - x)}{bc}} - \frac{x}{a}$$

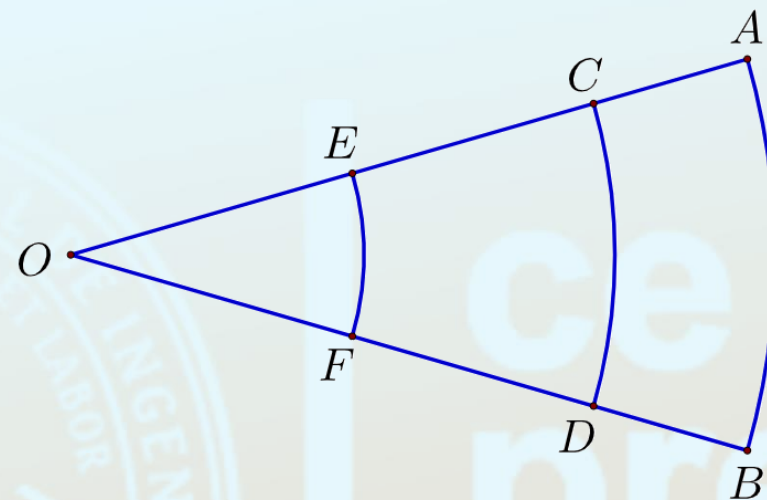
A) -2

B) -1

C) 0

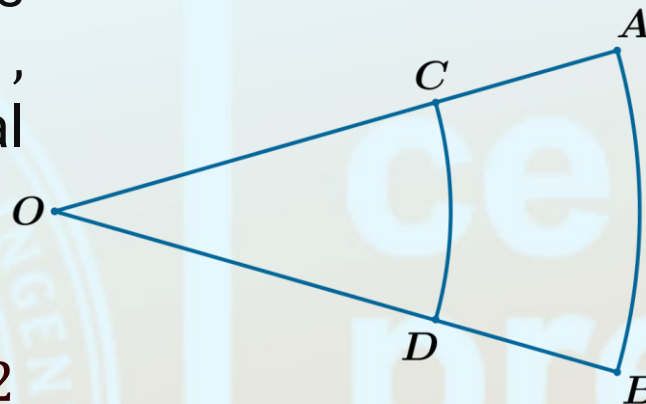
D) 1

E) 2



PROBLEMA 7

En la figura mostrada, AOB y COD son sectores circulares, donde $AC = BD = 2 \text{ cm}$; $\ell_{\widehat{AB}} = (3x + 1) \text{ cm}$, $\ell_{\widehat{CD}} = (2x + 3) \text{ cm}$. Calcule la medida del ángulo central AOB (en radianes), si x adopta su menor valor entero.



A) 0,25

B) 0,5

C) 0,75

D) 1

E) 2

PROBLEMA 8

En la figura mostrada , AOB, COD y EOF son sectores circulares tales que: $\ell_{\widehat{AB}} = (3a + b)u$, $\ell_{\widehat{CD}} = (a + b)u$, $\ell_{\widehat{EF}} = 2au$, $FD = au$ y $DB = bu$. Calcule $\ell_{\widehat{AB}}/FD$.

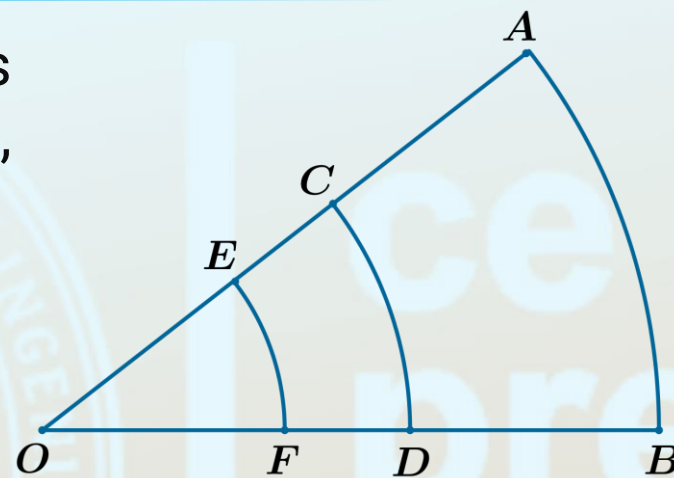
A) 2

B) 3

C) 4

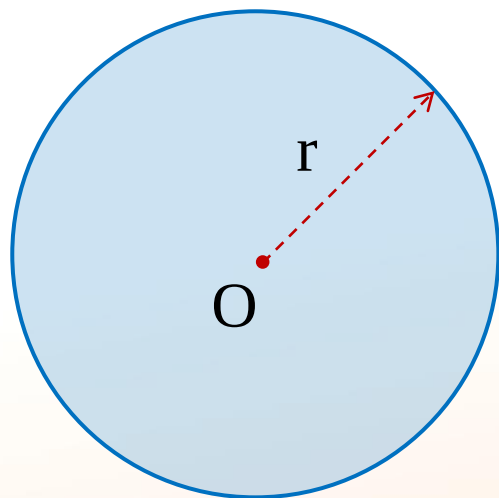
D) 5

E) 6



* Área de un círculo

El área de un círculo es igual al cuadrado de la longitud del radio multiplicado por π .



$$A_{\odot} = \pi r^2$$

Donde

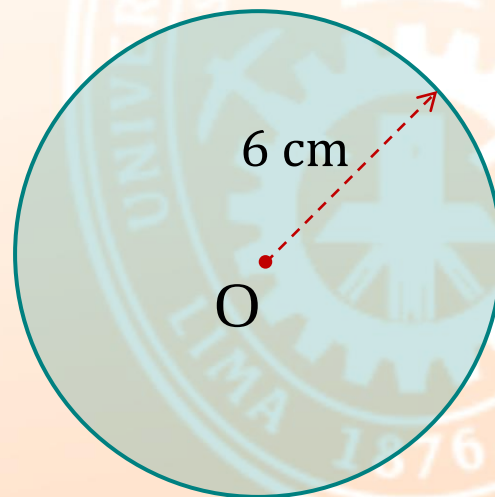
R: Longitud del radio del círculo

$$\pi \approx 3,1416$$

Por ejemplo en la figura:

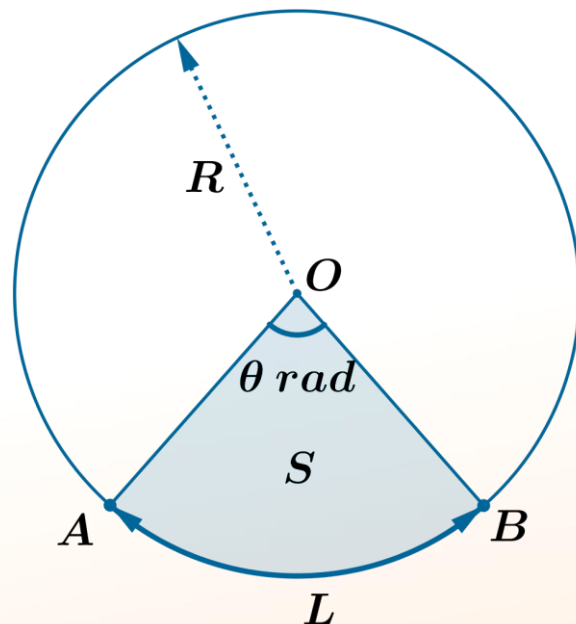
$$A_{\odot} = \pi r^2 = \pi(6)^2$$

$$\therefore A_{\odot} = 36\pi \text{ cm}^2$$



* Área de un sector circular

En la figura:



Por regla de tres simple:

Ángulo central

Área

$$2\pi \longrightarrow (\pi R^2)$$

$$\theta \longrightarrow S$$

$$\Rightarrow 2\cancel{\pi}S = \theta\cancel{\pi}R^2$$

$$\therefore S = \frac{\theta R^2}{2}$$

$$S = \frac{L \cdot R}{2}$$

$$S = \frac{L^2}{2\theta}$$

En la última fórmula:

* θ : Número de radianes del ángulo central

* Importante: $0 < \theta < 2\pi$

Como: $S = \frac{\theta R^2}{2} = \frac{\theta R \cdot R}{2}$; pero: $\theta \cdot R = L$

Entonces:

Además:

$$S = \frac{L \cdot R}{2} = \frac{L \cdot \overbrace{R\theta}^L}{2\theta}$$

PROBLEMA 9

La longitud del radio de un sector circular es igual a la longitud del lado de un triángulo equilátero. Si el área de la región triangular y el del sector circular son iguales. Calcule la medida del ángulo central del sector circular (en rad).

A) $\sqrt{3}/5$

B) $\sqrt{3}/4$

C) $\sqrt{3}/3$

D) $\sqrt{3}/2$

E) $\sqrt{3}$

PROBLEMA 10

Se tiene un sector circular cuya área es 36 cm^2 . Cuando el ángulo central se reduce a su cuarta parte y el radio se triplica, se genera un nuevo sector circular. Calcule el área del nuevo sector, en cm^2 .

A) 72

B) 81

C) 96

D) 108

E) 124

PROBLEMA 11 (PC1_CEPRE 2023- 2)

La medida del ángulo central de un sector circular es 25° y su radio mide 30 cm. Si se disminuye la medida del ángulo central en 9° , ¿en cuánto se debe de aumentar la longitud de su radio, en cm, para que el área del nuevo sector circular sea el cuádruplo del área del sector circular inicial?

A) 35

B) 45

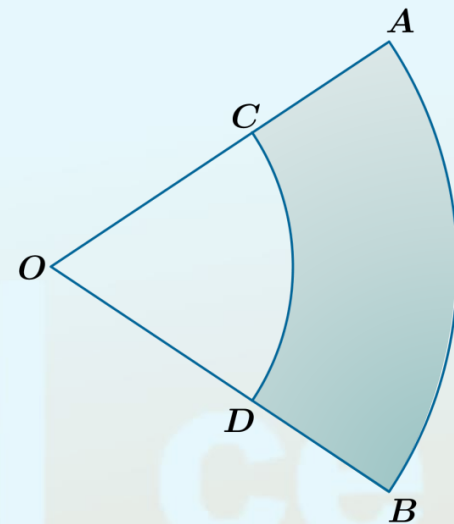
C) 50

D) 65

E) 75

PROBLEMA 12

En la figura se muestran los sectores circulares AOB y COD. Si el área del trapecio circular ABDC es al área del sector circular COD, como 7 es a 9, calcule $\frac{\ell_{\widehat{AB}}}{\ell_{\widehat{CD}}}$.



A) $6/7$

B) $5/4$

C) $3/2$

D) $5/3$

E) $4/3$

PROBLEMA 13 (PC 01 – CEPRE UNI 2022 – 2)

Con una soga de longitud 320 cm se forma un sector circular de área máxima. ¿Cuál es la longitud del radio (en cm) de dicho sector circular?

A) 80

B) 160

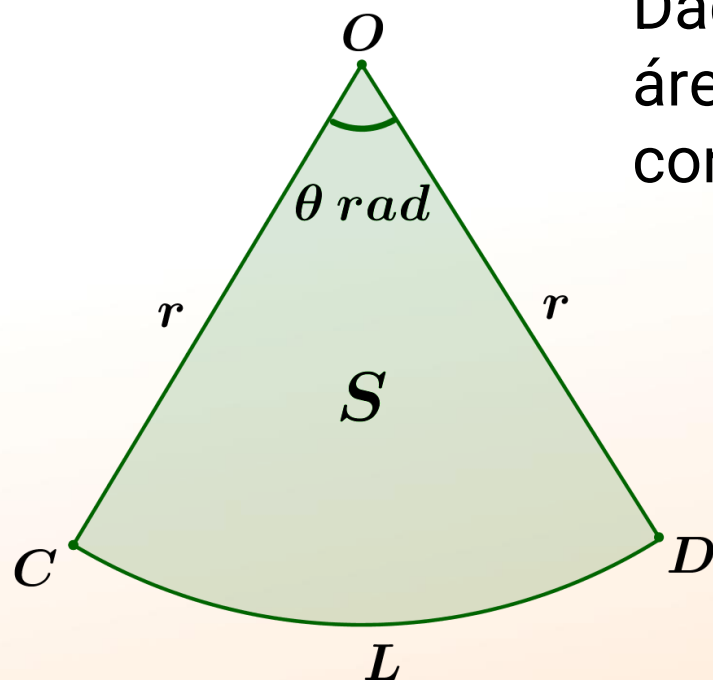
C) 60

D) 100

E) 40

* Propiedad

Si el perímetro de un sector circular es constante, su área es máxima cuando la longitud de su arco mide el doble de lo que mide su radio.



Dado el sector circular COD de la figura donde S es el área de su región correspondiente y su perímetro constante es P : $2r + L = P$

$$\rightarrow (S)_{\text{máxima}} \text{ cuando } L = 2r$$

$$\text{Siendo: } S_{\text{máx}} = \left(\frac{P}{4}\right)^2 = \frac{P^2}{16}$$

$$\text{Además: } L + 2r = P \Rightarrow L + L = P$$

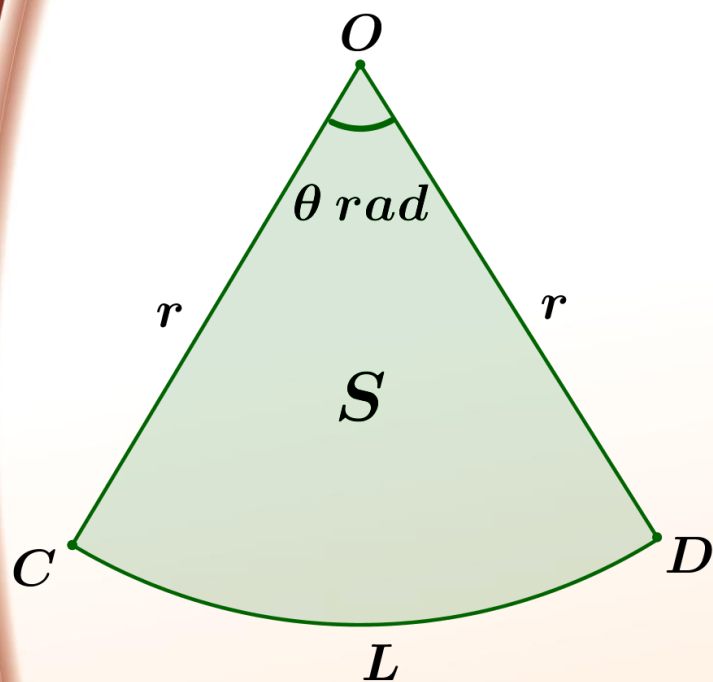


$$L = \frac{P}{2}$$

$$r = \frac{P}{4}$$

$$\theta = 2$$

Demostración: Se tiene un sector circular cuyo perímetro es constante, esto es: $2r + L = P$



Se conoce que: $S = \frac{(L)(r)}{2} = \frac{(L)(2r)}{2 \cdot 2} \dots (*)$

Como $L + 2r$ es constante = P

Para que S sea máxima: $(L) = (2r) = P/2 \dots (**)$

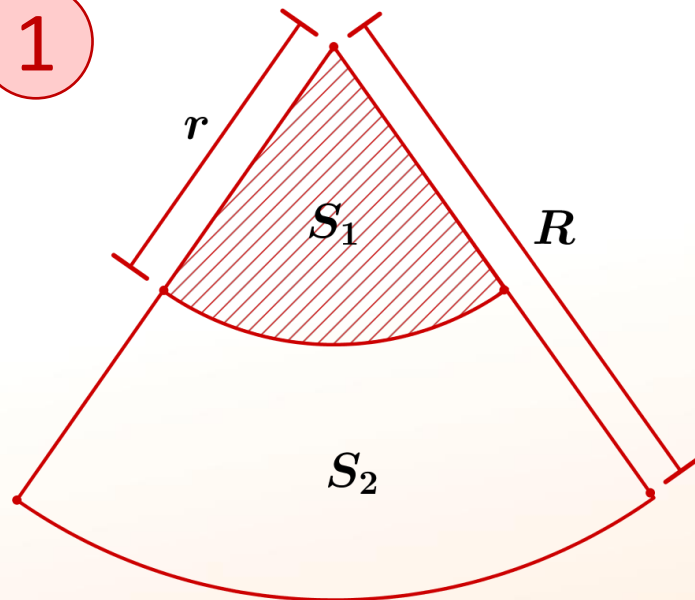
Reemplazando $(**)$ en $(*)$:

$$(S)_{\text{máxima}} = \frac{(P/2)(P/2)}{4} \Rightarrow (S)_{\text{máxima}} = \frac{P^2}{16}$$

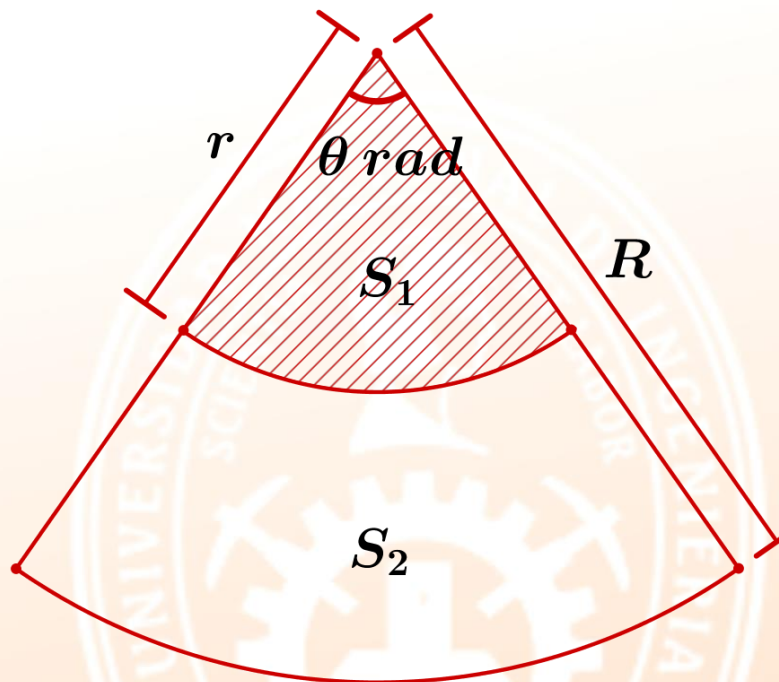
Como $\left\{ \begin{array}{l} 2r = \frac{P}{2} \Rightarrow r = \frac{P}{4} \\ L = \frac{P}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \theta = \frac{L}{r} \Rightarrow \theta = 2$

* Proporcionalidad de áreas en sectores circulares concéntricos

1



$$\frac{S_1 + S_2}{S_1} = \left(\frac{R}{r}\right)^2$$

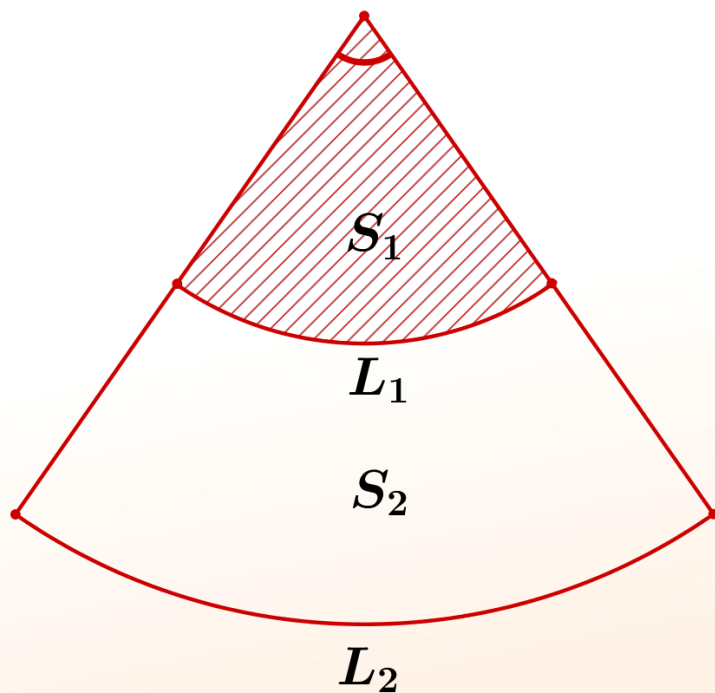
Demostración:


$$S_1 + S_2 = \frac{\theta R^2}{2}$$

$$S_1 = \frac{\theta r^2}{2}$$

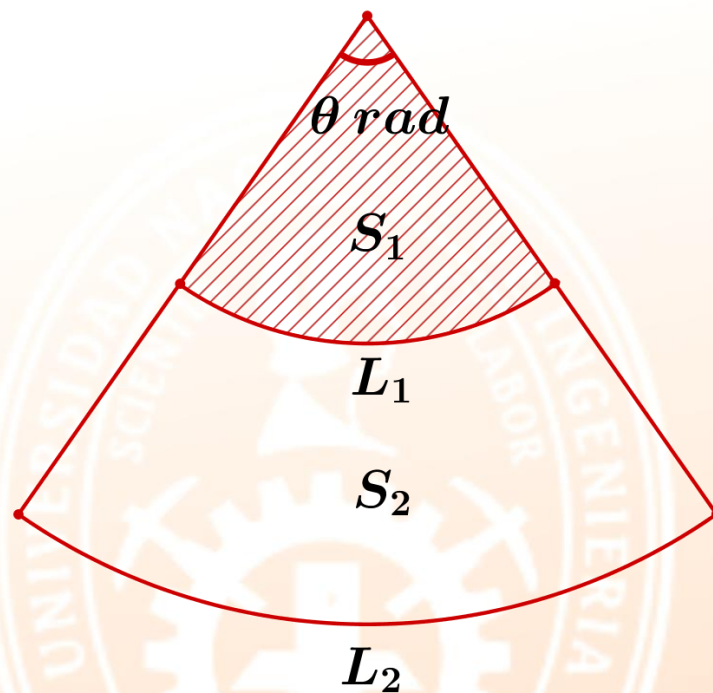
$$\frac{S_1 + S_2}{S_1} = \left(\frac{R}{r}\right)^2$$

2



$$\frac{S_1 + S_2}{S_1} = \left(\frac{L_2}{L_1} \right)^2$$

Demostración:

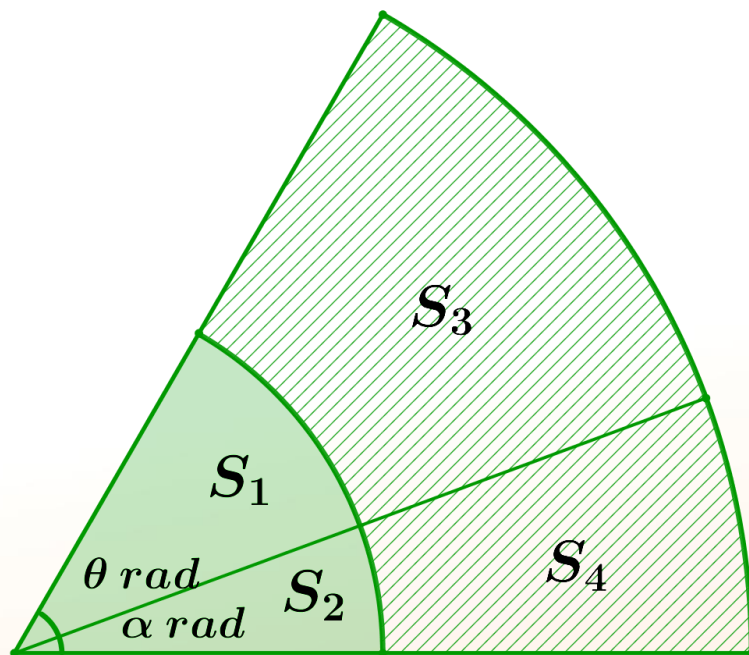


$$S_1 + S_2 = \frac{L_2^2}{2\theta}$$

$$S_1 = \frac{L_1^2}{2\theta}$$

$$\frac{S_1 + S_2}{S_1} = \left(\frac{L_2}{L_1} \right)^2$$

Caso particular 01



En la figura se cumple que:

$$\frac{\theta}{\alpha} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{S_3}{S_4}$$

Demostración:

Notamos que:

$$\frac{\theta}{\alpha} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{S_1 + S_3}{S_2 + S_4}$$

Por proporciones:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\cancel{S_1} + S_3 - \cancel{S_1}}{\cancel{S_2} + S_4 - \cancel{S_2}}$$

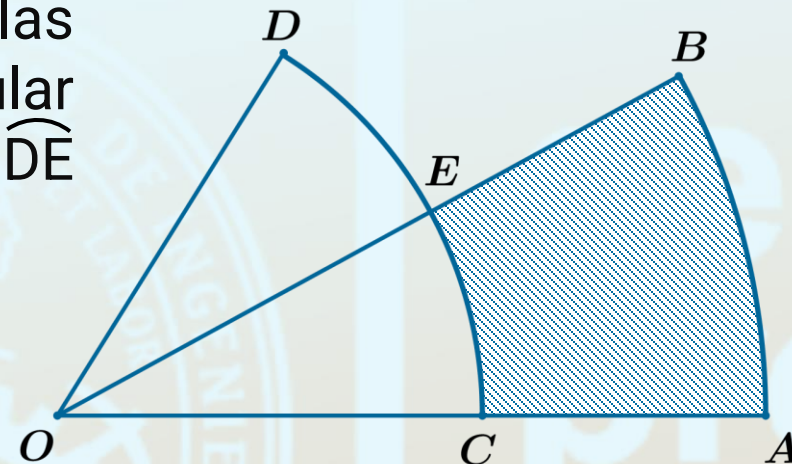
$$\therefore \frac{S_1}{S_2} = \frac{S_3}{S_4}$$

También:

$$S_1 S_4 = S_2 S_3$$

PROBLEMA 14

En la figura mostrada, las longitudes de los arcos $\widehat{EC}$ y $\widehat{BA}$ son 9 cm y 15 cm respectivamente. Si las áreas del sector circular DOC y el trapecio circular $ABEC$ son iguales, calcule la longitud del arco $\widehat{DE}$ (en cm).



A) 16

B) 15

C) 12

D) 7

E) $3\sqrt{7}$

PROBLEMA 15

En la figura O es el centro de la semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ y COD un sector circular. Si $AO=OB=2(BD)$ y las áreas del trapecio circular $CDBE$ y el sector circular AOE son iguales, calcule la medida del ángulo COD .

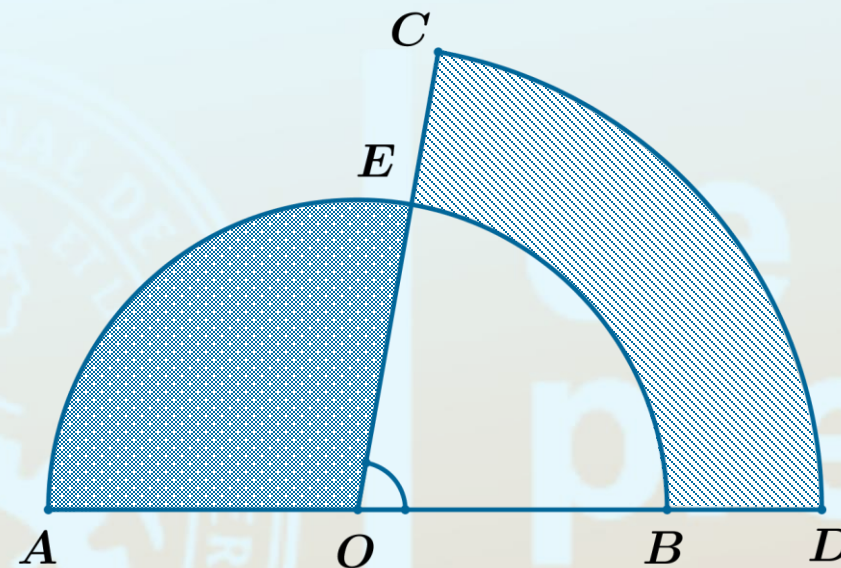
A) 84°

B) 80°

C) 76°

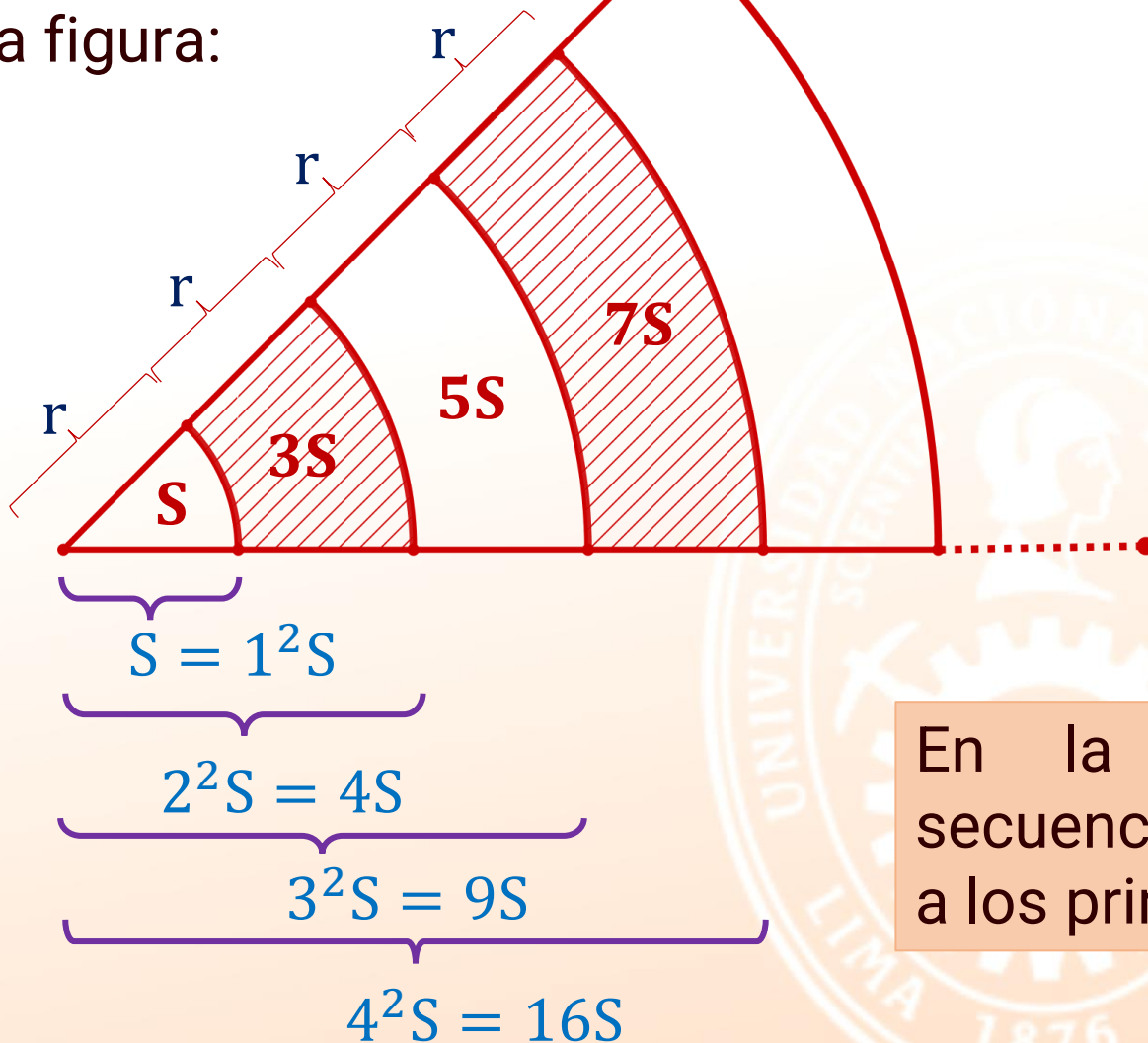
D) 72°

E) 64°



Caso particular 02:

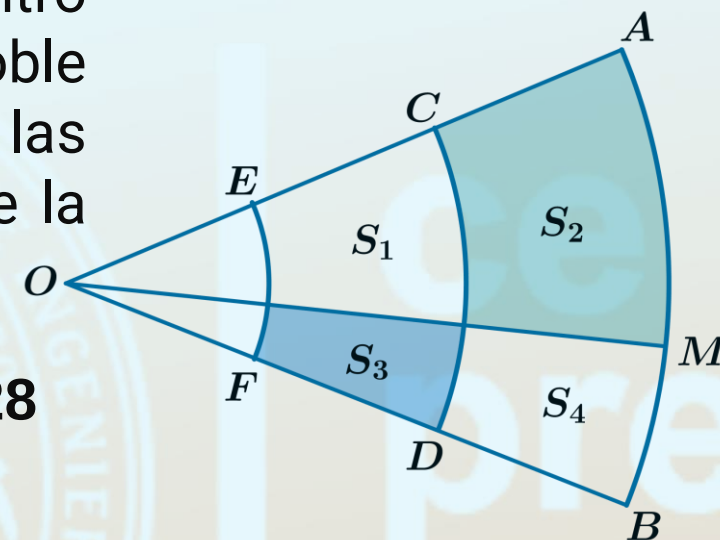
En la figura:



En la figura observamos la secuencia de áreas proporcionales a los primeros números impares.

PROBLEMA 16

En la figura mostrada $\widehat{AB}$, $\widehat{CD}$ y $\widehat{EF}$ son arcos con centro O , $OE = EC = CA$ y la medida del ángulo AOM es el doble de la medida del ángulo MOB . Si la diferencia de las áreas de las regiones S_1 y S_4 es igual a $4 u^2$, calcule la diferencia de las áreas de las regiones S_2 y S_3 (en u^2).



A) 18

B) 24

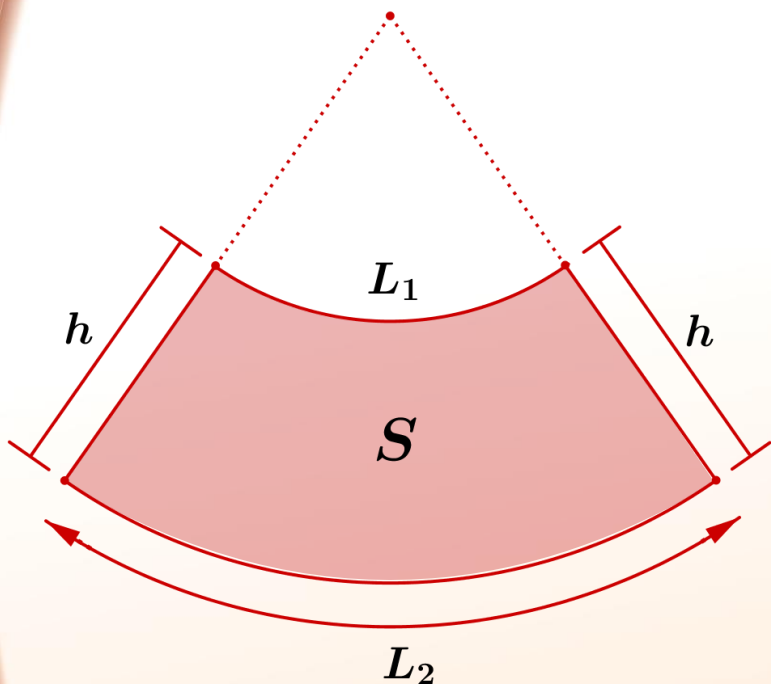
C) 28

D) 32

E) 36

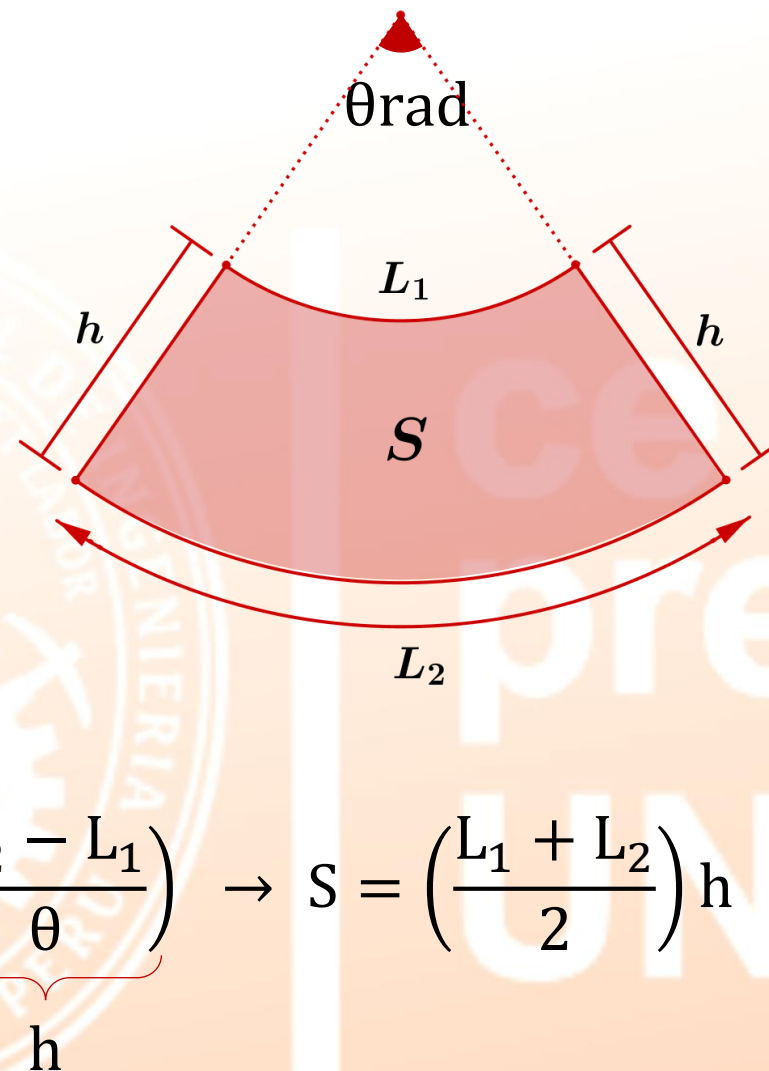
Área de un trapecio circular

En la figura:



$$S = \left(\frac{L_1 + L_2}{2} \right) h$$

Demostración:

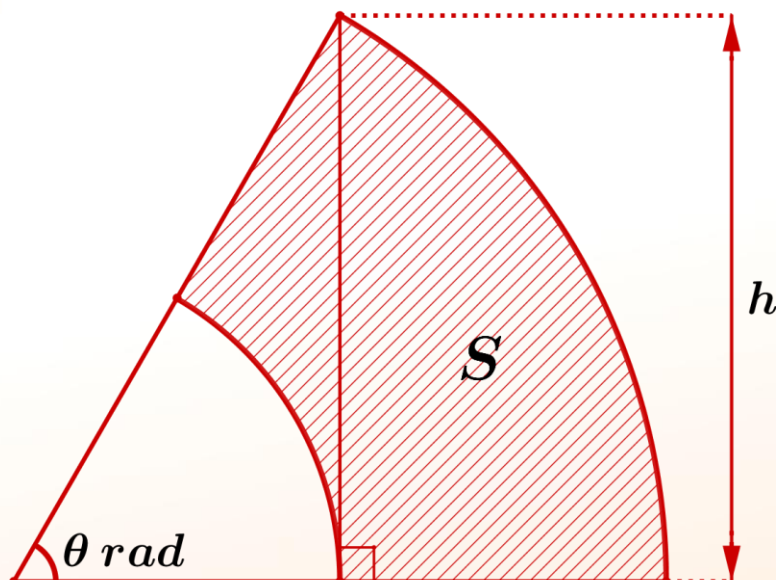


$$S = \frac{(L_2)^2}{2\theta} - \frac{(L_1)^2}{2\theta}$$

$$\rightarrow S = \left(\frac{L_2 + L_1}{2} \right) \underbrace{\left(\frac{L_2 - L_1}{\theta} \right)}_h \rightarrow S = \left(\frac{L_1 + L_2}{2} \right) h$$

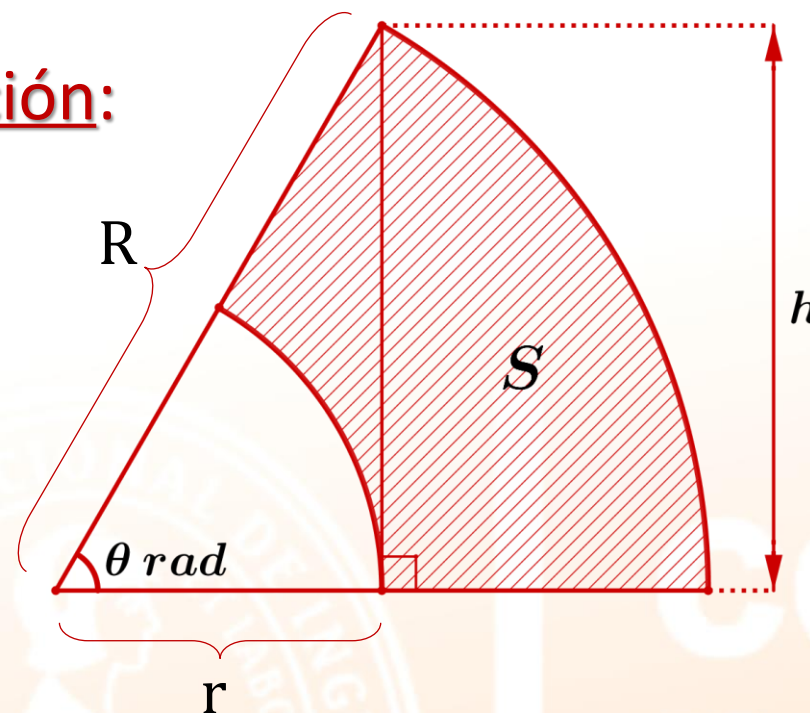
* Propiedad:

En la figura:



$$S = \frac{\theta h^2}{2}$$

Demostración:



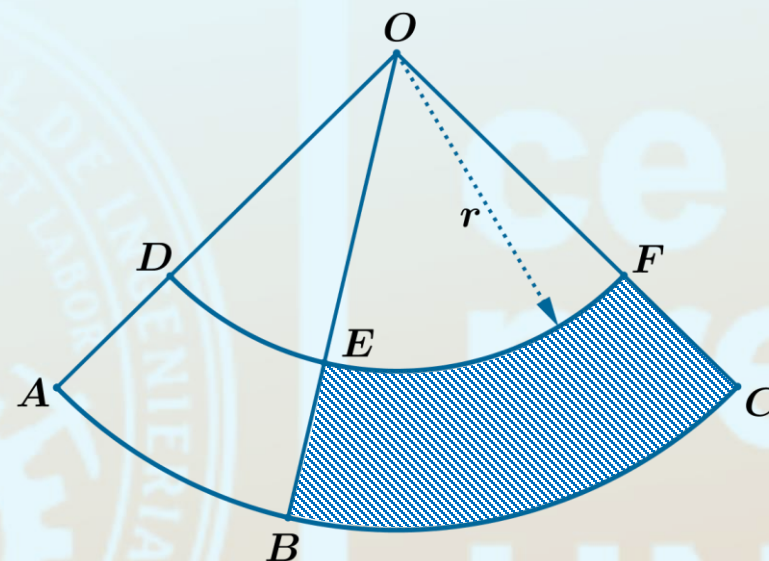
$$S = \frac{\theta R^2}{2} - \frac{\theta r^2}{2} \rightarrow S = \frac{\theta(R^2 - r^2)}{2}$$

Del teorema de Pitágoras: $R^2 - r^2 = h^2$

$$\therefore S = \frac{\theta \cdot h^2}{2}$$

PROBLEMA 17

En la figura ADFC es un trapecio circular, tal que $\ell_{\widehat{AB}} = (x - 1)u$, $\ell_{\widehat{BC}} = (x + 2)u$, $\ell_{\widehat{DE}} = (x - 2)u$, $\ell_{\widehat{EF}} = xu$ y $r = xu$. Calcule el área del trapecio circular BEFC en u^2 .



A) 20

B) 18

C) 15

D) 12

E) 10

PROBLEMA 18

En la figura mostrada O es el centro de las semicircunferencias de diámetros $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. El área del trapecio circular $DFEB$ es igual $24\pi u^2$ y la longitud de $\overline{DE}$ igual a $4\sqrt{10}u$. Calcule el área del trapecio circular $AEFC$ (en u^2).

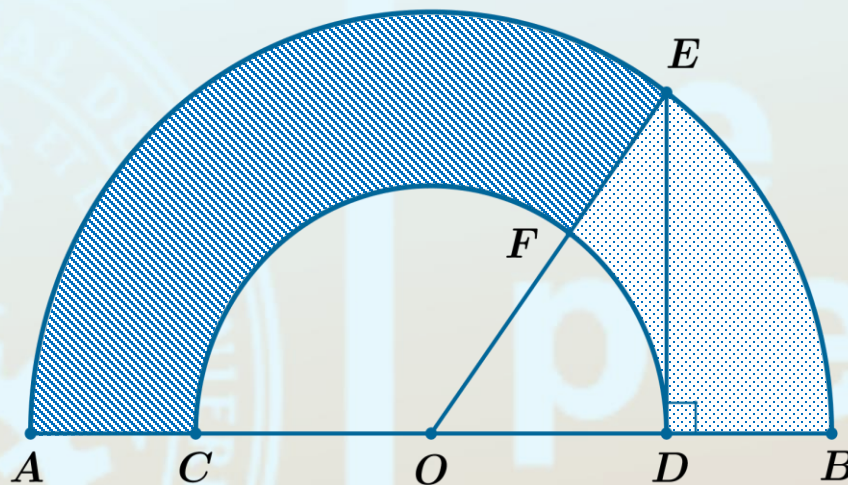
A) 64π

B) 56π

C) 54π

D) 52π

E) 48π



PROBLEMA 19

En la figura mostrada, el perímetro del sector circular BOC es 24 u y su área es máxima, además, la medida del ángulo AOB es 60° . Calcule el área del trapecio circular ADEB en u^2 , si D y E son puntos de tangencia.

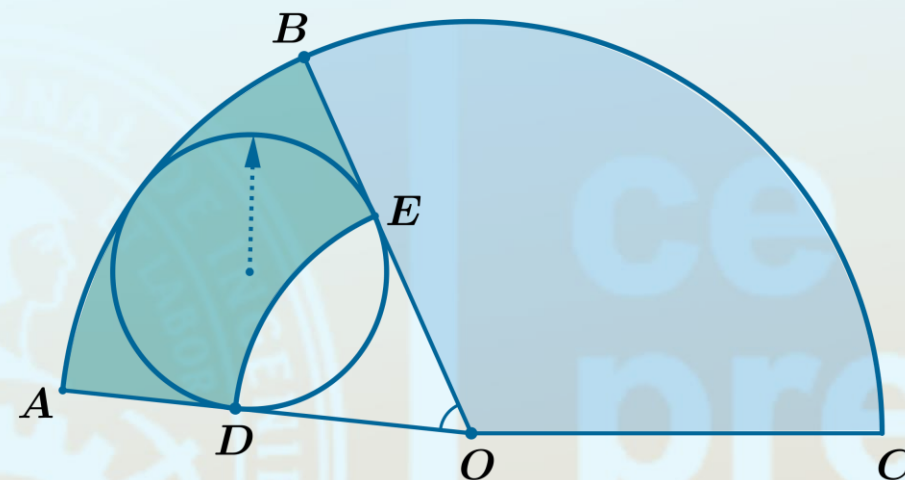
A) 2π

B) $5\pi/3$

C) 3π

D) $10\pi/3$

E) 4π



PROBLEMA 20

En la figura mostrada las longitudes de los arcos $\widehat{BC}$ y $\widehat{AF}$ son respectivamente, $(\frac{9}{x} + 1)u$ y $(x + 5)u$, la diferencia de los radios de los sectores circulares AOE y BOD es igual a $4u$. Si el área del sector circular ABCF es mínima, calcule el área del trapecio circular FCDE en u^2 .

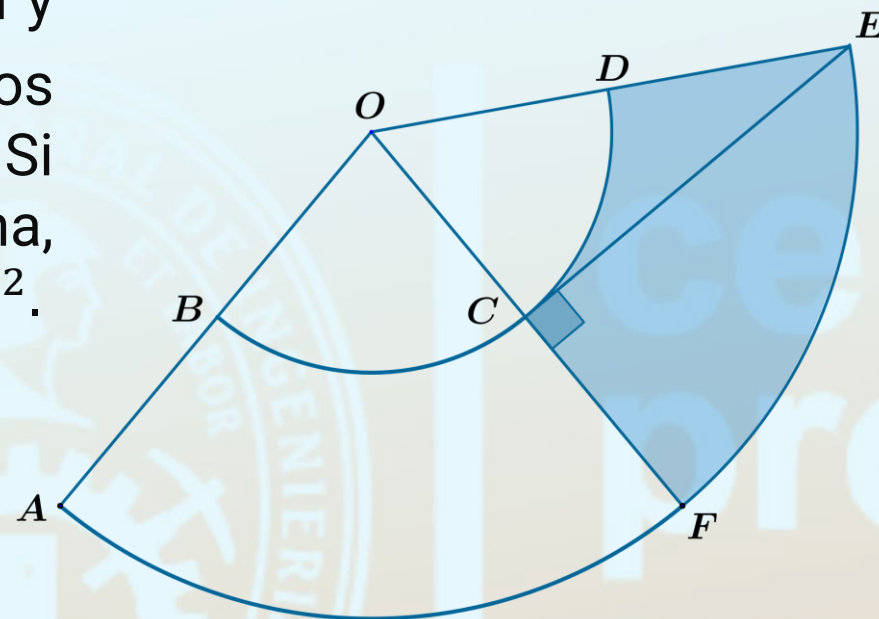
A) 5π

B) 6π

C) 7π

D) 8π

E) 9π



PROBLEMA 21

En la figura mostrada, el perímetro del trapecio circular ABDC es constante e igual a 24 u. Calcule la medida del ángulo central AOB en radianes, si la diferencia de las medidas de los arcos $\widehat{AB}$ y $\widehat{CD}$ es igual a 8 u, y el área del trapecio circular es máxima.

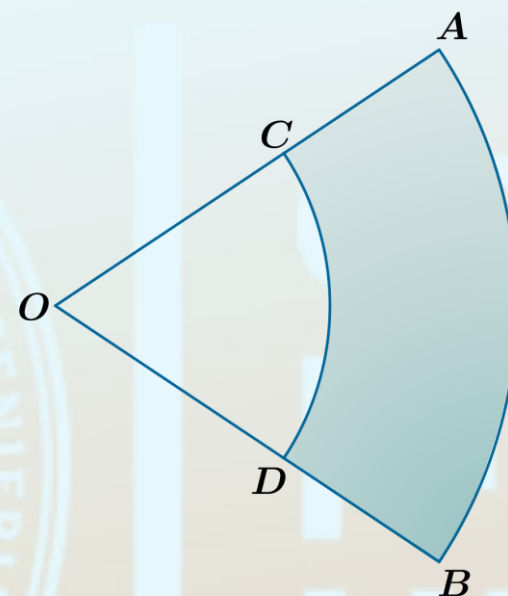
A) $\frac{2}{3}$

B) $\frac{4}{3}$

C) $\frac{5}{4}$

D) $\frac{6}{5}$

E) $\frac{8}{7}$



PROBLEMA 22

En la figura ABCD es un rectángulo y las áreas de las regiones sombreadas son iguales. Si $m\angle EAB = \theta$ rad, calcule $\cos(\sin(\theta))$.

A) $1/2$

B) $\sqrt{2}/2$

C) $3/5$

D) $4/5$

E) $\sqrt{3}/2$

